一般化された法線微分と調和関数の一意定理(ポテンシャル論とその関連分野)

鈴木, 紀明

数理解析研究所講究録
1016 巻 1997 年 22-29

一般化された法線微分と調和関数の一意定理

鈴木紀明 (Noriaki SUZUKI)
名古屋大学多元数理科学研究科

境界の部分集合上での調和関数の挙動から得られる一意性定理について考える．まだ解明出来ていない部分が多く，本稿が課題の列挙という形に終わってしまったことをお許し願いたい．さて，次のよく知られた事実が我々の考察の出発点である．

定理 A. D を滑らかな境界を持つ有界領域とし，A を境界 ∂D の部分集合とする．$C^1(\bar{D})$ に属する D 上の調和関数 h が

(1) $$h(X) = \frac{\partial h}{\partial n_X}(X) = 0, \ \forall X \in A$$

を満たし，A が空でない開集合ならば，h は恒等的に零である．

我々の目標は上記を境界が滑らかとは限らない領域に対して考察することである．滑らかでない領域における法線微分をどう考えるかが問題となる．

§1. Hopf の補題の一般化

まず，関連する次の結果から話を始めよう．境界の部分集合 A が一点集合のときは，古典的な Hopf の補題が一つの結果を与える．即ち，

定理 B. $X_0 \in \partial D$ を境界点とし，調和関数 h は非負値と仮定する．

(2) $$h(X_0) = \frac{\partial h}{\partial n_{X_0}}(X_0) = 0$$

ならば，h は零である．

条件 (2) は次の（より弱い）条件に置き換えることができる：

$$\liminf_{x \to X_0} \frac{h(x)}{\delta_D(x)} = 0.$$

ここで，$\delta_D(x) := \mathrm{dist}(x, \partial D)$ は境界までの距離関数である．この観点から Hopf の補題は次のように一般化できる（[5]）．

定理 C. D を Hölder 領域とすると，次を満たす定数 $\alpha > 0$ が存在する：D 上の非負値優調和関数 u が

$$\liminf_{x \to X_0} \frac{u(x)}{\delta_D(x)^\alpha} = 0$$

を満たせば，実は h は恒等的に零である．特に D が Lipschitz 領域ならば，最善の定数 α を決めることができる．

非負値の条件を落とすと問題は非常に難しくなる．[2] による一つの興味深い結果がある．

定理 D. B を $\mathbf{R}^n$ の単位球とし，$X_0 \in \partial B$, V を X_0 の近傍とする．$\overline{B \cap V}$ で連続，$B \cap V$ で調和な関数 h が

$$h(X) \geq h(X_0) = 0, \ \forall X \in V \cap \partial B$$

かつ，全ての自然数 N に対して

$$\lim_{x \in V \cap B, x \to X_0} \frac{h(x)}{|x - X_0|^N} = 0$$

を満たせば $h \equiv 0$ である．

即ち，調和関数 h が境界点 X_0 で (境界関数としての) 極小値をとり，かつそこで無限次の位数で零になっていれば，$h \equiv 0$ である（Hopf の補題の主張は「最小値」をとる境界点で「1 次の位数」で零になっていると $h \equiv 0$ である）．[2] は定理 D を Local Hopf Lemma と呼んだ．[6] では熱方程式の解に対して類似の考察を行った．

§2. 調和関数の gradient

定理 A の条件 (1) の集合 A を測度正とした場合にはどうなるか？は長年の問題であったが，1990 年に Bourgain and Wolff [3] が反例を与えた．内容を Math. Review より引用しよう：

The authors give an example of a $C^1(\bar{\mathbf{R}}^d_+)$-harmonic function which vanishes simultaneously with its gradient on a subset of $\partial \mathbf{R}^d_+$ of positive surface measure and which is not identically zero. This paper continuous the work of Wolff [Counterexamples with harmonic gradients in $\mathbf{R}^3$, (Pacific J. Math.)] and contributes to a negative solution of the problem of uniqueness set for the Cauchy problem for the Laplace equation which was open for about 40 years. Here $d \geq 3$. If $d = 2$ such an example is impossible. (by V. M. Isakov)

上記の結果に関連して次の予想がある：

「D を Lipschitz 領域とする．h を D 上の調和函数，A を ∂D の開部分集合とする．

$$h = 0 \text{ on } A, \quad \frac{\partial h}{\partial n} = 0 \text{ a.e. on } A \tag{3}$$

ならば $h \equiv 0$ であるか？」

これはまだ未解決であると思われるが部分的結果はいくつか知られている．F.H.Lin [4] は D が $C^{1,1}$ 領域の場合に考察し，非定数の調和関数 h が A で零になれば，

$$\{X \in A; \nabla h(X) = 0\}$$

の Hausdorff 測度の次元は $n-2$ 以下であることを示した．また，V.Adolfsson, L.Escauriaza and C.Kenig [1] は凸領域で，W.Wang [7] は $C^{1,\alpha}$-領域で上記予想が肯定的であることを示した．

§3. 主定理とその証明

主定理. D を $\mathbf{R}^n$ の領域とし，A を境界 ∂D の空でない開部分集合とする．更に，$B \cap \partial D \subset A$, $B \cap \overline{D^C} \neq \emptyset$ となる球 B がとれると仮定する．D 上の調和関数 h が

$$\lim_{x \to X} \frac{h(x)}{\delta_D(x)^2} = 0, \ \forall x \in A \tag{4}$$

を満たせば $h \equiv 0$ である．

注意 1. ∂D が十分滑らか，例えば C^2級ならば，

$$\lim_{x \to X} \frac{h(x)}{\delta_D(x)} = 0, \forall x \in A \Longleftrightarrow h(X) = \frac{\partial h}{\partial n_X}(X) = 0, \forall X \in A$$

であるから条件 (4) は条件 (1) に比べてかなり強い．D が Lipschitz 領域ならば (4) の $\delta_D(x)$ の指数を 1 にできる．しかしながら，指数が 1 では不十分となる例が実際にあるのか？は今のところ分らない．今後の大きな課題である．

主定理証明のために次の補題を準備する．

補題 1. 任意の領域 D に対して，次の (1),(2) を満たす，区分的に滑らかな境界からなる D の exhausion $\{D_k\}$ が存在する．

(1) $\partial D_k \subset \{x \in D; \delta_D(x) < 1/k\}$,

(2) $\sigma(\partial D_k) \leq k$,

ここで，$\sigma(\cdot)$ は曲面積を表す．

証明は $\{x \in D; \delta_D(x) \leq 1/k\}$ を半径 $1/2k$ の球で覆い，被覆定理を使えばよい．

［主定理の証明］　B 上の連続関数 $\tilde{h}$ を次で定める：

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & x \in B \cap D \\ 0 & x \in B \cap D^C \end{cases}$$

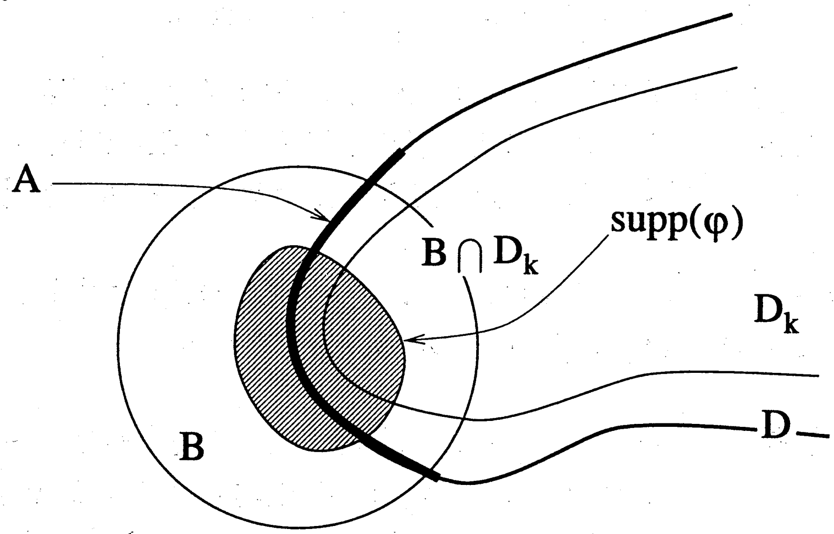
$\varphi \in C_0^\infty(B)$ と正数 ε を任意にとる．この時 k_0 を十分大きく取れば，任意の $k \geq k_0$ に対して，

$$|\int_{B \cap D_k} h \cdot \Delta\varphi dx - \int_{B \cap D} h \cdot \Delta\varphi dx| < \varepsilon.$$

更に，条件 (4) より

$$(5) \qquad |h(x)| \leq \varepsilon\delta_D(x)^2, \quad |\frac{\partial h}{\partial n}(x)| \leq \varepsilon\delta_D(x), \quad \forall x \in \mathrm{supp}(\varphi) \cap \partial D_k$$

とできる．



よって，グリーンの公式，(5) および補題 1 より

$$|\int_B \tilde{h} \cdot \Delta\varphi dx| = |\int_{B \cap D} h \cdot \Delta\varphi dx|$$

$$\begin{aligned}
&\le \ \left|\int_{B\cap(D\setminus D_k)} h\cdot\Delta\varphi dx\right| + \left|\int_{B\cap D_k} h\cdot\Delta\varphi dx\right| \\
&\le \ \varepsilon + \left|\int_{B\cap D_k}\Delta h\cdot\varphi dx + \int_{\partial(B\cap D_k)}(h\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\cdot\frac{\partial h}{\partial n})d\sigma\right| \\
&\le \ \varepsilon(1+\sup_{x\in B\cap\partial D_k}\{|\nabla\varphi(x)\cdot\delta_D(x)^2| + |\varphi(x)\cdot\delta_D(x)|\}\sigma(\partial D_k)) \\
&\le \ \varepsilon(1+\sup_{x\in B}|\nabla\varphi(x)| + \sup_{x\in B}|\varphi(x)|),
\end{aligned}$$

即ち，

$$\int\tilde{h}\cdot\Delta\varphi dx = 0,\quad \forall\varphi\in C_0^\infty(B)$$

となり，$\tilde{h}$ は B の調和関数であることが分る．これより $\tilde{h}\equiv 0$ で，結局 $h\equiv 0$ となる．

§4. Dirichlet 積分を使う調和関数の一般化された法線微分

別の視点からの法線微分の一般化を考える．

ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の領域を U で表す．$\mathcal{D}(U)$ で grad$f$ が 2 乗可積分になる U 上の関数全体を表す，即ち，

$$\mathcal{D}(U) := \{f; \mathrm{grad}f\in L^2(U)\}$$

とする．$\mathcal{D}(U)$ の 2 つの関数 f,g に対して．相互 Dirichlet 積分を次で定義する：

$$D_U(f,g) = D(f,g) := \int_U(\mathrm{grad}f,\mathrm{grad}g)dx,$$

$D(f,f)$ を $D(f)$ と略記する．これは f の Dirichlet 積分と呼ばれ，$(D(f))^{1/2}$ は f の Dirichlet ノルムと呼ばれる．空間 $C_0^\infty(U)$ の Dirichlet ノルムによる閉包を $\mathcal{D}_0(U)$ で表す，この元を Dirichlet ポテンシャルと言う．

補題 2. $h\in\mathcal{D}(U)$ は U で調和とし，$f,g\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ とする．もし ∂U 上で $f=g$ ならば，$D_U(h,f|_U) = D_U(h,g|_U)$ である．

[証明] 境界値が f の U の Dirichlet 解を H_f^U で表すせば，$H_f^U = H_g^U$ である．また，$f|_U - H_f^U$ と $g|_U - H_g^U$ は Dirichlet ポテンシャルである．調和関数と Dirichlet ポテンシャルは $D_U(\cdot,\cdot)$ に関して直交するので，

$$D_U(h, f|_U - H_f^U) = D_U(h, g|_U - H_g^U) = 0.$$

よって，$D_U(h,f|_U) = D_U(h,H_f^U) = D_U(h,H_g^U) = D_U(h,g|_U)$ である．

注意 2. もし ∂U が十分滑らかで，調和関数 $h \in \mathcal{D}(U)$ が境界の各点で法線微分を持つならば，すべての $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ に対して，

$$D_U(h, f|_U) = \int_{\partial U} f \frac{\partial h}{\partial n} d\sigma$$

この時，補題 2 より写像 $f \mapsto D_U(h, f|_U)$ は ∂U 上の測度 $(\partial h/\partial n)d\sigma$ を定めている．

この注意から，2 乗可積分な gradient をもつ調和関数に対する法線微分が次のように一般化される．

定義 1. 調和関数 $h \in \mathcal{D}(U)$ が境界 ∂U で一般化された法線微分を持つとは

$$h_n := f \mapsto D_U(h, f|_U), f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$$

が実測度になるときとする．この測度 h_n を h の ∂U 上の法線微分と定める．

いかなる h といかなる $A \subset \partial U$ に対してこの h_n が存在するのか？も今後の課題である．一般化された法線微分がが定義出来ない例を挙げておく．

$$\begin{aligned}
h &:= \Re(\log z) \\
U &:= \{(x,y); -2 < x < 2, 0 < y < 3, x^2 + (y-1)^2 > 1\} \\
A &:= \{(x,0); -1 < x < 1\} \quad \cup \{(x,y); x^2 + (y-1)^2\}
\end{aligned}$$

とすると，$|\mathrm{grad} h|^2 = 1/r^2$ より，$h \in \mathcal{D}(U)$ である．$X \in A \setminus \{0\}$ のとき $\partial h/\partial n$ は通常の法線微分を持ち，特に $X = (x,0)$ では

$$\frac{\partial h}{\partial n}(X) = \frac{1}{x}$$

となる．これは実軸上では可積分でないので測度は定義できない．

さて，(3) との関連で，この一般化された法線微分を用いて，次が成り立つのでは，と予想している：

U 上の調和関数が ∂U の部分開集合 A 上で一般化された法線微分 h_n をもち，かつ

$$h(X) = 0 \ \ \forall X \in A, \quad h_n = 0 \text{ on } A$$

ならば $h \equiv 0$ か？

謝辞 本講演後，多くの方から注意，コメントを頂きました．東工大の村田実氏からは定理 A は擬微分作用素の半局所性の反映であるとの指摘を受けました ([8], [9])．お茶の水大の渡辺ヒサ子氏はフラクタル型の領域に対してはフラクタル次元に依存した条件を考えることにより補題 2 が改良できる（よって，主定理の条件も改良される）ことを注意されました ([10])．学習院大の神直人氏にはリーマン面の倉持コンパクト化上で"一般化された法線微分 $=0$" かつそこで定数になる非定数調和関数の例を教わりました ([11])．さらに，一般化された法線微分に関して，大同工大の中井三留先生から Doob の論文 ([12])，島根大の秦野薫氏から Král の本 ([13]) の情報を頂きました．筆者の不勉強を恥じ入るとともに，これらの方々に感謝を申し上げます．

参考文献

[1] V. Adolfsson, L. Escauriaza and C. Kenig, Convex domains and unique continuation at the boundary, Revista Mat. Iberoamericana, 11, No.3 (1995), 513-525.

[2] M. S. Baouendi and L. P. Rothschild, A local Hopf lemma and unique continuationfor harmonic functions, Duke J. Math., Inter. Research Notices, 71 (1993), 245-251.

[3] J. Bourgain and T. Wolff, A remark on gradients of harmonic functions in dimension $d \geq 3$, Collq. Math. 40/41 (1990), 253-260.

[4] F. H. Lin, Nodal sets of solutionsof elliptic and parabolic equations, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1991), 287-308.

[5] N. Suzuki, Hopf の補題の一般化, 関数論研究集会予稿集, 1996 年 1 月.

[6] N. Suzuki, A local Hopf lemma for solutions of the one dimensional heat equation, Nagoya Math. J. 146 (1997), 1-12.

[7] W. Wang, A remark on gradients of harmonic functions, Revista Mat. Iberoamericana, 11, No.2 (1995), 227-245.

[8] M. Murata, Anti-locality of certain functions of the Laplace operator, J. Math. Soc. Japan, 25 (1973), 556-564.

[9] 村田・倉田，　偏微分方程式１，岩波講座・現代数学の基礎７，岩波書店，1996.

[10] H. Watanabe, The double layer potentials for a bounded domain with fractal boundary, Potential Theory-ICPT94, p.463-471, Walter de Gruyter, Berlin New York 1996.

[11] N. Jin, Some remarks on the class of Riemann surfaces with (W)-property, Proc. Japan Acad. 69, Ser.A, No.8 (1993), 322-326.

[12] J. L. Doob, Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, Ann. Inst. Fourier, 12 (1962), 573-622.

[13] J. Král, Integral operator in Potential Theory, Lecture Notes in Math. 823, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.

晩夏の Eichstätt にて